Gewone differentiaalvergelijkingen

Cursus 2001-2002.

Eerste herhalingstentamen, Woensdag 3 juli 2002, duur: 3 uur.

1.[1] Los op (en licht de gevolgde methode toe):
(a)[3] $(x^4 - 2xy^3)y' + 4y^4 - 2x^3y = 0$ (homogene vergelijking).
(b)[3] $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$ met behulp van de oplossing $y = e^{x^2}$ en verlaging van de graad
(c)[3] $y'' - 4y' + 4y = 16\,x\,\sin 2x$ door passende keuze van een particuliere oploss-ing.

2.[1] Beschouw de differentiaalvergelijking $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \sin x$.
(a)[1] Waarom heet deze differentiaalvergelijking *lineair* en waarom *inhomogeen*?
(b)[2] Bepaal een fundamentaal systeem van oplossingen van de homogene vergelijking van de vorm $y(x) = x^\lambda$.
(c)[4] Bepaal vervolgens met behulp van de methode van de variatie van de constanten de algemene oplossing van de inhomogene vergelijking.
(d)[2] Bepaal alle oplossingen y die voldoen aan $y(0) = 0$ en $y'(0) = 0$. Je zou hier toch alleen maar de nuloplossing verwachten of niet? Verklaar je antwoord. (Aanwijzing: Op welke intervallen zijn de (maximale) oplossingen gedefineerd? Welke stelling pas je toe?)

3.[1] (a)[4] Bepaal de fundamentaalmatrix Y(x) met $Y(0) = I$ en de algemene oplossing $y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$ van het 2×2 systeem

$$y'(x) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} y(x), \quad y(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \; a, b \in \mathbb{R}.$$

(b)[2] Stel $a + b \neq 0$ en $a - b \neq 0$. Toon aan $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \to \pm 1$ als $x \to \pm\infty$.
(c)[3] Schets in een faseportret de oplossingen bij $(a,b) = \alpha(1,1)$, $(a,b) = \beta(1,-1)$, $(a,b) = \gamma(1,0)$, en $(a,b) = \delta(0,1)$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, en geef de doorlooprichting aan.

Z.O.Z.

4.[1] (a)[5] Beschouw de differentiaalvergelijking

$$(*) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} + 4u - 4u^3 = 0.$$

Schrijf $(*)$ als een systeem van twee eerste orde differentiaalvergelijkingen. Bepaal de stationaire punten van dit systeem en toon aan dat het periodieke oplossingen heeft. Wat betekent dit voor oplossingen van $(*)$?

(b)[4] (i) Formuleer het alternatief van Fredholm.

(ii) Beschouw het randwaardeprobleem:

$$y''(x) + 4y(x) = 0, \quad 2y(0) - y'(0) = \alpha, \; y'(\pi/8) = \beta.$$

Geef nodig en voldoende voorwaarden aan α en β waaronder dit randwaardeprobleem een oplossing heeft en bepaal onder die voorwaarden de oplossing(en).